Lycée laymoune ◂ 2021-2022 ▸ ★ Semestre . 1 ★

2ème . Bac . Comptabilité

DS n°2

[Modèle n° 1]

EXERCICE . 1

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2+7x-2}{x+3}$$

1°/ Déterminer D l'ensemble de définition de f.

2°/ Calculer $\lim_{x\to(-3)^-} f(x)$ et $\lim_{x\to(-3)^+} f(x)$ et donner une interprétation graphique du resultat.

3°/ Vérifier que : $(\forall x \in D)\ f(x) = 2x+1-\frac{5}{x+3}$

4°/ Mq la droite $(\Delta) : y = 2x+1$ est asymptote à $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $(-\infty)$ et $(+\infty)$.

EXERCICE . 2

I Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 9 \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} = \frac{2}{3}(u_n + 6)$$

1°/ Calculer u_1 et u_2

2°/ Notons : $(\forall n \in \mathbb{N})\ w_n = u_n - 12$

2-a) Vérifier que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique, Calculer w_0 et w_n en fonction de n.

2-b) Déterminer u_n en fonction de n.

2-c) Calculer $\lim u_n$.

II Calculer les limites :

① $\lim (0,3)^n$ ② $\lim \left(\frac{5}{4}\right)^n$; ③ $\lim \frac{7^{n+2}}{9^{n+1}}$

④ $\lim \frac{8n^3-n}{n+5n^3}$ ⑤ $\lim \frac{3^n+2^n}{3^n+4^n}$

— ★ fin ★ —

2ème Bac Comptabilité . Modèle 1 du DS n°2 (2021/2022)

▸ Correction « Semestre . I »

EXERCICE 1 :

$$f(x) = \frac{2x^2+7x-2}{x+3}$$

1°/ $D = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ x+3 \neq 0\}$

on a : $x+3 \neq 0 \iff x \neq -3$

donc : $D = \mathbb{R} - \{-3\} =]-\infty ; -3[\cup]-3, +\infty[$

2°/ Tableau de signe de $(x+3)$:

donc :

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$x+3$	$-$	0	$+$

$(-3)^-$ $(-3)^+$

$$\lim_{x \to (-3)^-} f(x) = \lim_{x \to (-3)^-} \frac{2x^2+7x-2}{x+3} = \text{"}\frac{-5}{0^-}\text{"} = \boxed{+\infty}$$

(car : $2(-3)^2 + 7(-3) - 2 = 2 \times 9 - 21 - 2 = -5$)

$$\lim_{x \to (-3)^+} f(x) = \text{"}\frac{-5}{0^+}\text{"} = \boxed{-\infty}$$

interprétation : $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote vértical d'équation : $x = -3$.

3°/ Soit $x \in D$. On a :

$$2x + 1 - \frac{5}{x+3} = \frac{(2x+1)(x+3) - 5}{(x+3)}$$

$$= \frac{2x^2 + 6x + x + 3 - 5}{x+3} = \frac{2x^2+7x-2}{x+3} = f(x)$$

4°/ on a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) - y$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(2x + 1 - \frac{5}{x+3} - (2x+1) \right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-5}{x+3} = \boxed{0}$$

de même on a : $\lim_{x\to-\infty} f(x) - y = \lim_{x\to+\infty} \frac{-5}{x+3} = \boxed{0}$

<u>Conclusion</u> : $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique (Δ) : $y = 2x + 1$ au voisinage de $(+\infty)$ et $(-\infty)$

EXERCICE . 2 :

I . $u_0 = 9$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_{n+1} = \frac{2}{3}(u_n + 6)$

1°/ $u_{0+1} = \frac{2}{3}(u_0 + 6) = \frac{2}{3} \times (9 + 6) = \frac{2 \times 15}{3}$

donc : $\boxed{u_1 = 10}$

$$u_2 = u_{1+1} = \frac{2}{3}(u_1 + 6) = \frac{2}{3}(10 + 6) = \frac{2 \times 16}{3} = \boxed{\frac{32}{3}}$$

2°/ $(\forall n \in \mathbb{N})$, $w_n = u_n - 12$.

2°-a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $w_{n+1} = u_{n+1} - 12$

$$= \frac{2}{3}(u_n + 6) - 12 = \frac{2}{3}(u_n + 6) - \frac{12 \times 3}{3}$$

$$= \frac{2}{3}(u_n + 6) - \frac{2 \times 18}{3}$$

$$= \frac{2}{3}(u_n + 6 - 18) = \frac{2}{3}(\underbrace{u_n - 12}_{w_n}) = \frac{2}{3} w_n$$

donc (w_n) est géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$

$w_n = u_n - 12 \Rightarrow w_0 = u_0 - 12$
$= 9 - 12$

donc : $\boxed{w_0 = -3}$

Wn en fonction de n :

on sait que : $w_n = q^{n-k} w_k$ (car (w_n) est géometrique) donc :

$$w_n = q^{n-0} w_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times (-3)$$

donc : $\boxed{w_n = (-3)\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

2-b) on a : $w_n = u_n - 12 \Leftrightarrow w_n + 12 = u_n$

donc : $u_n = (-3) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 12$

2-c) on a : $-1 < \frac{2}{3} < 1$ donc : $\lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

donc : $\lim u_n = \lim -3\left(\frac{2}{3}\right)^n + 12 = -3 \times 0 + 12$
$= \boxed{12}$

II

1) $\lim (0,3)^n = \boxed{0}$ (car $-1 < 0,3 < 1$)

2) $\lim \left(\frac{5}{4}\right)^n = \boxed{0}$ car $\frac{5}{4} > 1$

3) $\lim \frac{7^{n+2}}{9^{n+1}} = \lim \frac{7^n \times 7^2}{9^n \times 9^1} = \lim \left(\frac{7}{9}\right)^n \times \frac{7^2}{9} = \boxed{0}$

car $-1 < \frac{7}{9} < 1$

④ $\lim \frac{8n^3 - n}{n + 5n^3} = \lim \frac{n^3\left(8 - \frac{n}{n^3}\right)}{n^3\left(\frac{n}{n^3} + 5\right)}$

$= \lim \frac{8 - \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + 5} = \frac{8 - 0}{0 + 5} = \boxed{\frac{8}{5}}$

car : $\lim \frac{1}{n^2} = 0$.

⑤ $\lim \frac{3^n + 2^n}{3^n + 4^n} = \lim \frac{3^n\left(1 + \frac{2^n}{3^n}\right)}{3^n\left(1 + \frac{4^n}{3^n}\right)}$

$= \lim \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^n} = \text{"} \frac{1}{+\infty} \text{"} = \boxed{0}$

car ;

$$\begin{cases} -1 < \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow \lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \\ \frac{4}{3} > 1 \Rightarrow \lim \left(\frac{4}{3}\right)^n = +\infty \end{cases}$$

——* * fin * *——